INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE.

Mai 1974. — Option MATHÉMATIQUES

TROISIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

Sont autorisés à cette épreuve les documents suivants :

a. *Tables de logarithmes;*
b. *Tables de Flavien, Hennequin et Laborde;*
c. *Règles et cercles à calcul.*

Le candidat indiquera, en tête de sa copie, les tables numériques dont il a fait usage.

N. B. — 1° Les axes Ox, Oy sont orthonormés.

2° Dans tout le problème, x désigne une variable réelle; a désigne un paramètre réel, appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

3° La notation $\log_a x$ désigne le logarithme de x dans le système de base a; $\operatorname{Log} x$ désigne le logarithme népérien de x.

4° Pour certains résultats numériques, l'expression « la précision permise par l'emploi des tables de logarithmes à cinq décimales » employée dans le texte ne doit pas empêcher les candidats, s'ils le désirent, d'utiliser toute autre table autorisée par le règlement du concours, pourvu que la précision obtenue soit sensiblement équivalente.

On considère la courbe (C_a) ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation

$$y = a^x$$

et la courbe (Γ_a) ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient les relations

$$y = \log_a x , \qquad x > 0$$

1° Montrer que, quel que soit a appartenant à l'intervalle $]0, 1[$, les courbes (C_a) et (Γ_a) ont en commun un point, noté $M_1(a)$, dont les coordonnées $[x_1(a), y_1(a)]$ vérifient la relation

$$x_1(a) = y_1(a)$$

Étudier les variations de $x_1(a)$ considéré comme fonction de a, a décrivant l'intervalle $]0, 1[$.

2° Montrer qu'il existe dans l'intervalle $]0, 1[$ une valeur de a et une seule, notée a_0 dans la suite du problème, telle que (C_{a_0}) et (Γ_{a_0}) soient tangentes au point $M_1(a_0)$. Quel est alors le coefficient directeur de la tangente commune aux deux courbes en $M_1(a_0)$?

Donner des expressions simples de a_0 et de $x_1(a_0)$.

3° Calculer, avec la précision permise par les tables de logarithmes à cinq décimales, une valeur décimale approchée de a_0 et une de $x_1(a_0)$.

4° Démontrer que :

a. Si $a_0 \leqslant a < 1$, les courbes (C_a) et (Γ_a) n'ont en commun aucun autre point que le point $M_1(a)$ mentionné au 1°;

b. Si $0 < a < a_0$, elles ont en commun en tout trois points notés respectivement $M_1(a)\ [x_1(a), y_1(a)]$; $M_2(a)\ [x_2(a), y_2(a)]$ et $M_3(a)\ [x_3(a), y_3(a)]$, avec $x_2(a) < x_1(a) < x_3(a)$, les points $M_2(a)$ et $M_3(a)$ étant symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On suggère, pour traiter cette question plus difficile, d'observer d'abord que si $0 < x < 1$, le signe de la différence $(a^x - \log_a x)$ est aussi celui de :

$$\Phi_a(x) = \operatorname{Log}(a^x) - \operatorname{Log}(\log_a x)$$

dont on pourra étudier les variations.

Les candidats qui ne pourraient traiter cette question de façon satisfaisante sont invités à admettre sans démonstration les résultats donnés dans le texte, de façon à passer, sans perdre trop de temps, à l'étude de la question 5°.

5° On se propose de construire l'ensemble (H) des points $M_2(a)$ et $M_3(a)$, a décrivant l'intervalle $]0, a_0]$.

A cet effet, on procédera de la façon suivante.

a. Former une équation de (H) en éliminant a entre les équations

$$y = a^x \quad \text{et} \quad y = \log_a x$$

b. A partir de l'équation cartésienne de (H), former une représentation paramétrique de (H) en étudiant l'intersection de (H) et de la droite d'équation $y = tx$. Soit

$$x = u(t) \qquad y = v(t)$$

cette représentation paramétrique [u et v étant évidemment liées par la relation $v(t) = t\,u(t)$] : on calculera explicitement les expressions de $u(t)$ et de $v(t)$.

c. Mettre en évidence sur les expressions trouvées ci-dessus une symétrie de (H) : cette symétrie était-elle prévisible?

d. Étudier les variations de $u(t)$ et de $v(t)$. En déduire le tracé de (H). Vérifier que (H) passe par le point $M_1(a_0)$ défini au 2°. Préciser les tangentes à (H) au point $M_1(a_0)$ ainsi qu'aux points de (H) situés sur Ox et sur Oy, notés respectivement A et B.

e. Soit $m(t) = \dfrac{v'(t)}{u'(t)}$. Calculer $m(t)$, puis $m'(t)$. Étudier le signe de $m'(t)$. En déduire le sens de concavité de (H).

f. Déterminer et calculer numériquement avec la précision permise par les tables de logarithmes à cinq décimales les rayons de courbure de (H) en A, B, $M_1(a_0)$.

g. Calculer aussi a en fonction de t. Soit

$$a = z(t) \qquad \operatorname{Log}(-\operatorname{Log} a) = w(t)$$

Former l'expression de $w(t)$, puis étudier ses variations pour $t > 0$. En déduire les variations de $z(t)$. Vérifier qu'à toute valeur de a telle que $0 < a < a_0$ correspondent deux valeurs de t (et deux seulement) inverses l'une de l'autre.

h. En déduire les variations de $x_2(a)$ et de $x_3(a)$ considérés comme fonctions de a.

6° Quel est le rayon de courbure de (C_{a_0}) et de (Γ_{a_0}) au point $M_1(a_0)$? En donner une valeur décimale approchée avec la précision définie au 5°.

7° Préciser complètement les positions respectives de (Γ_a), (C_a), et (H) dans les trois cas $a_0 < a < 1$, $a = a_0$ et $0 < a < a_0$. On dessinera trois figures distinctes, correspondant respectivement à ces trois cas.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail